1- كتابة f(1+i) على الشكل الجبري

لدينا : $f(1+i)=\dfrac{1+i-2}{2(1+i)-1}$

$=\dfrac{-1+i}{1+2i}$

$=\dfrac{(-1+i)(1-2i)}{1^2+2^2}$

$=\dfrac{-1+2i+i+2}{5}$

إذن : $f(1+i)=\dfrac{1}{5}+\dfrac{3}{5}i$

2- إثبات الاستلزام

ليكن z عددا عقديا بحيث $|z|=1$

بما أن $\overline{f(z)}=\overline{\left(\dfrac{z-2}{2z-1}\right)}$

$=\dfrac{\overline{z}-2}{2\overline{z}-1}$

وبما أن : $|z|=1$

فإن : $\sqrt{z\overline{z}}=1$

ومنه : $\overline{z}=\dfrac{1}{z}$

أي أن : $\overline{f(z)}=\dfrac{\dfrac{1}{z}-2}{2.\dfrac{1}{z}-1}$

$=\dfrac{1-2z}{2-z}$

$=\dfrac{2z-1}{z-2}$ (لدينا $z\neq 2$ لأن $|z|=1$)

$=\dfrac{1}{f(z)}$

إذن : $f(z).\overline{f(z)}=1$

يعني أن : $|f(z)|^2=1$

يعني أن : $|f(z)|=1$

3- حل المعادلة $f(z)=z$

لدينا لكل z من $\mathbb{C}-\left\{\dfrac{1}{2}\right\}$:

$f(z)=z \Leftrightarrow \dfrac{z-2}{2z-1}=z$

$\Leftrightarrow 2z^2-2z+2=0$

$\Leftrightarrow z^2-z+1=0$

مميز هذه المعادلة هو :

$$\Delta = 1-4 = -3 = (i\sqrt{3})^2$$

إذن حلاها هما : $z_1 = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}$ و $z_2 = \frac{1-i\sqrt{3}}{2}$

وبالتالي فإن المجموعة حلول المعادلة $f(z) = z$

هي : $S = \left\{ \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \right\}$

*** كتابة الحلين على الشكل المثلثي :**

$$z_1 = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$= \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3} = \left[1, \frac{\pi}{3}\right]$$

$$z_2 = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$= \cos\frac{\pi}{3} - i\sin\frac{\pi}{3}$$

$$= \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \left[1, \frac{-\pi}{3}\right]$$

4- تحديد مجموعة النقط M(x,y) بحيث $|f(z)| = \frac{1}{2}$

ليكن z عددا حقيقيا بحيث $z \neq \frac{1}{2}$

لدينا : $|f(z)| = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{|z-2|}{|2z-1|} = \frac{1}{2}$

$$\Leftrightarrow |z-2| = \frac{1}{2}|2z-1|$$

$$\Leftrightarrow |z-2| = \left|z - \frac{1}{2}\right|$$

لتكن A النقطة التي لحقها 2 و B النقطة التي لحقها $\frac{1}{2}$

بما أن : $|z-2| = AM$

و $\left|z - \frac{1}{2}\right| = BM$

فإن مجموعة النقط M(Z) بحيث $|f(z)| = \frac{1}{2}$ هي مجموعة النقط M بحيث MA=MB أي هي واسط القطعة $[AB]$

طريقة ثانية :

ليكن z عددا عقديا بحيث $z \neq \frac{1}{2}$

نضع $z = x+iy$ حيث $(x,y) \in IR^2$ و $(x,y) \neq \left(\frac{1}{2}, 0\right)$

$$|f(z)| = \frac{1}{2} \Leftrightarrow |z-2| = \left|z - \frac{1}{2}\right|$$

$$\Leftrightarrow |x+iy-2| = \left|x+iy-\frac{1}{2}\right|$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(x-2)^2+y^2} = \sqrt{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+y^2}$$

$$\Leftrightarrow (x-2)^2 = \left(x-\frac{1}{2}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{5}{4}$$

وبالتالي فإن مجموعة النقط M(z) بحيث $|f(z)| = \frac{1}{2}$ هي المستقيم ذو المعادلة $x = \frac{5}{4}$